**Л 5. Формально-логические модели**

1. Логическая модель представления знаний.
2. Исчисление высказываний.
3. Основы исчисления предикатов.

**Представление знаний** — вопрос, возникающий в когнитологии (науке о мышлении), в информатике и в исследованиях искусственного интеллекта. В когнитологии он связан с тем, как люди хранят и обрабатывают информацию. В информатике — с подбором представления конкретных и обобщённых знаний, сведений и фактов для накопления и обработки информации в ЭВМ. Главная задача в ИИ — научиться хранить знания таким образом, чтобы программы могли осмысленно обрабатывать их и достигнуть тем подобия человеческого интеллекта.

Под термином «представление знаний» чаще всего подразумеваются способы представления знаний, ориентированные на автоматическую обработку современными компьютерами, и, в частности, представления, состоящие из явных объектов ('класс всех мерчендайзеров, 'Вован - индивид') и из суждений или утверждений о них ('Вован - мерчендайзер', 'все мерчендайзеры - лузеры'). Представление знаний в подобной явной форме позволяет компьютерам делать дедуктивные выводы из ранее сохранённого знания ('Вован - лузер').

1. **Логическая модель представления знаний** — модель в представлении знаний.

Основная идея подхода при построении логических моделей представления знаний — вся информация, необходимая для решения прикладных задач, рассматривается как совокупность фактов и утверждений, которые представляются как формулы в некоторой логике.

Знания отображаются совокупностью таких формул, а получение новых знаний сводится к реализации процедур логического вывода. В основе логических моделей представления знаний лежит понятие формальной теории, задаваемое кортежем:

, где:

- счетное множество базовых символов (алфавит);

- множество (перечислимое) формул (называемых также правильно построенными формулами), построенных из элементов с использованием некоторого набора синтаксических правил;

- выделенное подмножество априори истинных формул (аксиом);

- конечное множество отношений между формулами, называемое правилами вывода.

Достоинства логических моделей представления знаний:

1. В качестве «фундамента» здесь используется классический аппарат математической логики, методы которой достаточно хорошо изучены и формально обоснованы.
2. Существуют достаточно эффективные процедуры вывода, в том числе реализованные в языке логического программирования Пролог, использующие механизмы автоматического доказательства теорем для поиска и логически осмысленного вывода информации.
3. В базах знаний можно хранить лишь множество аксиом, а все остальные знания получать из них по правилам вывода.
4. **Исчисление высказываний**

Рассмотрим логические модели, основанные на классической теории исчисления предикатов 1-го порядка, когда предметная область описывается в виде набора аксиом.

Предикат, в логике — понятие, определяющее предмет суждения (субъект) и раскрывающее его содержание.

Рассмотрение логики предикатов начнем с **исчисления высказываний**.

**Вызыванием** называется некоторое предложение, смысл которого можно выразить значениями ИСТИНА (TRUE) или ЛОЖЬ (FALSE).

**Например**, предложения «собака серая» и «собака черная» будут высказываниями. Из простых высказываний можно составить более сложные:

«собака серая или собака черная», «собака серая и собака черная», «если собака не серая, то собака черная».

При этом элементарными высказываниями считаем те, которые нельзя разделить на части. Элементарные высказывания рассматриваются как переменные логического типа.

**Исчисление высказываний**. Символами языка логики высказываний, составляющими ее **алфавит**, являются:

• логические переменные Р, Q, R, S, ...,

• логические константы TRUE (ИСТИНА) и FALSE (ЛОЖЬ),

• логические операции («и», конъюнкция), («или», дизъюнкция), ¬ («не», отрицание), («тогда и только тогда, когда», эквиваленция), →(«следует», импликация) и круглые скобки.

С помощью элементов алфавита можно построить разнообразные логические формулы. Будем называть выражение, составленное из обозначений высказываний и связок (и, разумеется, скобок), логической формулой, если оно удовлетворяет следующим условиям:

* каждая логическая переменная и константа истинности являются формулами. Например: TRUE, Р, Q и R — формулы;
* если Р и Q — формулы, то ¬Р, PQ, PQ, P≡Q, P→Q - тоже формулы (запись ¬Р будем заменять на ).
* других формул не бывает.

Формула, давая некоторое описание мира, может быть как истинной, так и ложной. **Интерпретация** — это утверждение относительно правдивости высказывания в некотором возможном мире.

Интерпретация определяет семантику формулы путем сопоставления символов формул со свойствами объектов среды. Значение формулы ИСТИНА говорит о наличии некоторого свойства и ЛОЖЬ - об отсутствии. Каждое возможное отображение значения истинности высказывания соответствует возможной интерпретации мира. Например, если Р обозначает высказывание «идет дождь», a Q - «я на работе», то набор высказываний {Р, Q} имеет четыре различных отображения в таблице истинности {ИСТИНА, ЛОЖЬ}. Эти отображения соответствуют четырем различным интерпретациям.

1. **Основы исчисления предикатов (ИП)**

Исчисление высказываний является весьма грубой моделью представления знаний. Основной ее недостаток в том, что высказывание здесь рассматривается как единое целое, без анализа его внутренней структуры. Это ограничивает возможности ИВ при моделировании сложных силлогических построений.

Силлогизм (образовано от греческого слова: συλλογισμός — подытоживание, умозаключение). В традиционной формальной логике силлогизмом называют дедуктивное умозаключение, в котором из двух ранее установленных суждений, называемых посылками, получается третье суждение, называемое выводом.

а. **Понятие предиката**

Если высказывание отражает какой-либо факт и далее оперирует с ним как с единой формулой, не разделяя его, скажем, на субъекты и объекты, то предикатная форма, напротив, отображает данный факт уже как взаимодействие, отношение или свойство некоторых сущностей. Это отношение принято выделять прописными буквами перед скобками, в которых указываются те или иные сущности, находящиеся в данном отношении.

Рассмотрим несколько предложений:

а) Лена и Таня сестры;

1. грибы в лесу;
2. капля долбит камень;
3. снег белый;
4. мальчик послал книгу брату.

В правилах исчисления предикатов эти предложения можно записать следующим образом:

а') СЕСТРЫ (Лена, Таня);

б') В (грибы, лес);

в') ДОЛБИТ (капля, камень);

г') БЕЛЫЙ (снег);

д') ПОСЛАЛ (мальчик, книга, брат).

В первом предложении выделено отношение родства, во втором - предлогом В - пространственные отношения. В предложении в') выделено действие между субъектом и объектом, в предложении г') - свойство (в данном случае - цвет), в предложении д') - также действие.

То, что стоит перед скобками, называется **предикатным символом** (предикатной константой), то, что стоит в скобках, - термами. Каждый терм занимает свое место. **Предикатные символы могут быть предлогами, существительными, глаголами, прилагательными** и т.п. Терм, как правило, существительное или то, что его заменяет. Все это вместе образует предикатную формулу (или, короче, - предикат).

Термов может быть несколько. По их количеству предикаты разделяются на одноместные (г'), двуместные (а', б', в'), трёхместные (д') и т.д. Предикатная формула еще называется атомом.

**б. Алфавит ИП**

ИП - аксиоматическая система, построенная согласно формальной теории *F = (А, V, W, R).*

Алфавит ИП - *А* содержит:

индивидные константы *а, Ь, с,..., k*;

предметные переменные *х, у, z,..., u*;

функциональные константы *f, g, h,..., w*;

высказывания *р, q, г, s,…,l*;

предикатные константы *Р, Q, R,..., V*.

Исчисление предикатов в определенном смысле продолжение и расширение исчисления высказываний, поэтому в алфавит включены все те же пропозициональные связки . Но перечень логических знаков в ИП расширяется еще двумя, называемых кванторами: и . Квантор , читается, как «все», «для всех», «всякий», «каков бы ни был» и т.н. Поэтому он называется квантором всеобщности (общности). Квантор всеобщности является сверткой бесконечной конъюнкции: . Квантор существования - - читается, как «некоторый», «хотя бы один», «существует», и является сверткой бесконечной дизъюнкции: . . Выражение читается: «для любого *х* выполняется условие *Р(х)*». Выражение - «существует хотя бы один x, при котором выполняется *Р(x)* (то есть *Р(x) = И*)».

**в. Синтаксис ИП**

Множество синтаксических правил *V* ИВ применимо и в ИП. Правильно построенные формулы (ППФ) в рамках исчисления высказываний остаются ППФ и в исчислении предикатов. Но формулы ИВ, для того, чтобы участвовать во всех преобразованиях формул ИП должны быть представлены в предикатной форме. То есть в каждом высказывании должен быть выделен предикат и его аргументы.

Добавляются еще правила:

1. атом есть ППФ;

2. если *Р(х)* - ППФ и *x* – переменная, то и - ППФ;

3. если и *х, у* - переменные и *f* - функция, то - ППФ. Последние формулы верны и для смешанных кванторов.

Каждому квантору соответствует только одна переменная, в наших примерах или . Эта переменная называется связанной или квантифицированной, она пишется сразу за квантором. Область действия квантора - формула, к которой применяется эта квантификация. Каждое вхождение квантифицированной переменной в область действия квантификации является **связанным**, любая другая переменная в данной области, не являющаяся связанной, называется свободной.

Каждую предикатную формулу можно интерпретировать, то есть оценить ее как И или Л. При этом можно оценить «перекрытие» кванторов на одну и ту же переменную:

интерпретируется как , а интерпретируется как .

Будем понимать под предикат и отметим важные соотношения:

(6.1)

, то есть одноименные кванторы можно менять местами. Иное дело разноименные кванторы. Здесь выполняется только такое условие:

Последняя импликация поясняется следующим примером. Пусть имеем для целых чисел истинное утверждение: (для любого у найдется такой , что выполняется равенство ). Переставим кванторы: . Получим выражение: существует такой, при котором выполняется условие () для всех , что некорректно.

**4. Базовые аксиомы ИП**

Система базовых аксиом в ИП может быть принята такой же, как и в ИВ. Однако к ней необходимо добавить аксиомы, учитывающие появление кванторов:

,

говорит, что если истинен для всех , то он истинен и для некоторого у из этого же универсума (если все яблоки в данном ящике красные, то одно-то красное уж найдется всегда).

говорит, что если найдется , при котором истинен, то верно, что найдется хотя бы один , для которого предикат тоже истинен (даже если совпадает с ). (Если среди яблок в данном ящике нашлось одно сладкое, то уже существует, по крайней мере, одно сладкое.)

**5. Правила вывода в ИП**

Правила вывода остаются прежними: правило подстановки и правило заключения, но они дополняются еще одним правилом, учитывающим свойства кванторов. Это правило называется правилом специализации. Суть его в следующем: если ППФ истинна и - некоторая константа, то формула также истинна, то есть справедливо .

Пусть, например, имеются формулы и . Если они истинны, то, применяя специализацию, имеем ряд теорем:

то есть (modus ponens с )

**6. Примеры предикатов**

Разберем несколько примеров построения предикатов.

1. **«А вы, друзья, как ни садитесь, все ж в музыканты не годитесь».**

Обозначим: - способ рассаживания музыкантов, - качество исполнения, - предикат, связывающий способ рассаживания и качество исполнения. Окончательная формула: .

2. **«Кто не работает, тот не ест»:** .

Здесь - человек, - предикатная константа *РАБОТАЕТ*, - предикатная константа *ЕСТЬ*.

3. **«Болтун - находка для шпиона»**:

где «роли исполняют»: - болтун, - шпион, - *НАХОДКА*.

4. Силлогизм о Сократе можно переписать так: для всех , если - человек, то - смертен; Сократ человек; (следовательно) Сократ смертен. Обозначим через *М* «быть смертным», через *Я* «быть человеком». Мы приходим к следующей формуле:

(Сократ здесь - индивидная константа).

5. **«В каждом городе найдется краевед, который покажет достопримечательности»**:

(Если - город (), то найдется такой краевед (), *ЖИВУЩИЙ\_В* (), который *ПОКАЖЕТ* () достопримечательности ().)

Формулы ИП часто можно писать по-разному на один и тот же словесный текст, пользуясь разной степенью «детализации». Например, **«Болтун - находка для шпиона»** можно записать более подробно:

8. ,

где  *- ЧЕЛОВЕК*, - БОЛТУН, - НАХОДКА, - шпион.

**Упражнения**.

**1. Попробуйте представить в виде предикатных формул следующие фразы:**

• Кто весел, тот смеется;

• Кто-то привык за победу бороться;

• И никто ему по-дружески не спел;

• Всяк сверчок знай свой шесток;

• И никто не узнает, где могилка моя;

• Все цветы мне надоели, кроме роз;

• Есть многое на свете, друг Гораций, что и не снилось нашим мудрецам;

• Немногие вернулись с поля, не будь на то Господня воля, не отдали б Москвы.

**2. Пусть означает *ЛЮБИТ*, - цветы, - конфеты, - девушка.**

Переведите на русский язык выражения:

a) ,

b) ,

c) ,

d) ,

е)

Преобразование формул в ИП

|  |  |
| --- | --- |
| Стандартизация переменных | Подстановки и унификация |
| Исключение квантора существования | Логический вывод в ИП |
| Предваренная форма | Стратегии резолюции |
| Исключение квантора общности | Дерево опровержения |
| Приведение матрицы к КНФ |  |

**Старая версия лекции (2016 год)**

**Логика предикатов первого порядка** является более выразительным средством, чем логика высказываний, и позволяет представлять знания о среде более компактно.

Приведем понятие **предикат, данное Д. А. Поспеловым: «Под предикатом будем понимать некоторую связь, которая задана на наборе констант или переменных»**. Пример предиката: «А больше В». При задании семантики (т. е. определении переменных А и В) можно будет судить об истинности предиката.

Предикат принимает только два значения ИСТИНА или ЛОЖЬ.

Исчисление предикатов. Основными синтаксическими единицами логики предикатов являются константы, переменные, функции, предикаты, кванторы и логические операторы. Формальный синтаксис логики предикатов первого порядка можно представить с помощью **языка** **Бэкуса— Наура**, который обычно применяется для записи грамматик языков программирования:

→

→

→

→

→ │ │

→

→ │ │

→ │

→

→ │ │

→ │

→ │)│|(

В данной записи слева в угловых скобках приводятся **типы синтаксических объектов**, в правой части записи приводятся возможные **способы организации синтаксически корректных объектов определяемого типа**. При этом знак «|» интерпретируется как знак «или»; заключение конструкции в скобки {} означает, что эта конструкция может повторяться нуль или более раз.

**Номера идентификаторов** следует понимать в том смысле, что идентификаторы, используемые для обозначения объектов разных типов, должны быть различны.

Например, обозначает константу, которая формируется из строчных букв.

**Имена переменных** должны начинаться с заглавных букв.

**Имена предикатов** должны состоять из прописных букв.

**Имена функций** состоят из строчных букв, при этом первой буквой является f, g, h, р, q.

**Функции, как и предикаты**, задают связь между переменными и константами, но эта связь не характеризуется логическим значением. С помощью функции можно представить сложный объект, представляющий набор информации о мире. **Предикат и функция отличаются также и на синтаксическом уровне, так как функция может являться аргументом предикатов, а предикат — нет.**

Математически строго формулы логики предикатов определяются рекурсивно:

1) предикат есть формула;

2) если А и В - формулы, то ¬A, АВ, AВ, A→B, A≡B - тоже формулы;

3) других формул не бывает.

Таблица истинности связок предикатов (И — ИСТИНА, Л — ЛОЖЬ), позволяющая определить, истинно или ложно значение формулы - связки при различных значениях входящих в нее предикатов А и В.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| А | В | АВ | AВ | ¬A | A→B | A≡B |
| И | И | И | И | Л | И | И |
| И | Л | Л | И | Л | Л | Л |
| Л | И | Л | И | И | И | Л |
| Л | Л | Л | Л | И | И | И |

Здесь выражение A→B аналогично «ЕСЛИ А, ТО В» в естественном языке.

Многие формулы логики предикатов требуют использования **кванторов**, определяющих область значений переменных — аргументов предикатов.

Условимся, что выражение «все течет, все изменяется» является правильным. Если определить, что предикат ТЕЧИЗМ(х) описывает «х течет, изменяется», то этот предикат является истиной **при подстановке любой сущности реального мира в х**.

Выделенная фраза обозначается через (x) (перевернутое А от английского All —все), она обычно читается как «для всех» и записывается перед предикатом в виде (х) F(x).

В логике предикатов имеется еще одна конструкция для суждения о значении предикатов по их переменным. Этот квантор эквивалентен суждению **«существует, по крайней мере, одно х такое, что F(x) — истина»**.

Выделенная фраза записывается в виде (х) (перевернутое Е от английского Exists — существует), а все суждение представляется как ( x)F(x).

Символы, которые означают «для всех» и «существует» - называются соответственно **квантором общности** и **квантором существования**. В логике предикатов первого порядка не разрешается применение кванторов к предикатам.

Переменная, которая **проквантифицирована**, называется связанной переменной, а переменная, которая не связана кванторами, называется свободной переменной.

Формула, в которой все переменные связаны, называется предложением. Каждому предложению ставится в соответствие определенное значение — «истина» или «ложь».

Сложные формулы в логике предикатов получаются путем комбинирования атомарных формул с помощью логических операций. Такие формулы называются правильно построенными логическими формулами (ППФ). Интерпретация ППФ возможна только с учетом конкретной области интерпретации, которая представляет собой множество всех возможных значений термов, входящих в ППФ. Для представления знания в данной предметной области необходимо установить область интерпретации, т. е. выбрать константы, которые определяют объекты в данной области, а также функции и предикаты, которые определяют зависимости и отношения между объектами. После этого уже можно построить логические формулы, описывающие закономерности данной предметной области. Все это возможно, когда знания являются полными, четкими и надежными, в противном случае записать знания с помощью логической модели не удается.

**Пример.**

Введем обозначения:

А(х) = «студент х учится отлично»;

В(х) = «студент х получает повышенную стипендию».

Формула А(Иванов)→В(Иванов) означает: «студент Иванов учится отлично, следовательно, студент Иванов получает повышенную стипендию».

Формула с квантором общности (х)(А(х) →В(х)) означает: «каждый студент, который учится отлично, получает повышенную стипендию».